دراسة مسألة كوشي للمعادلة التفاضلية الخطية، واللاخطية في الفضاءات الدالية اللانهائية الأبعاد

د/ محمود الحمزه

مقدمة:

تدرس المعادلات التفاضلية في فضاءات ذات أبعاد مختلفة ويرتبط بذلك مفاهيم مختلفة للمفاضلة مما يؤدي لمسائل كوشي المتنوعة بعموميتها، وهذه المسائل لها تطبيقات هائلة في مجالات علمية كثيرة منها مسائل التحكم الأمثل .

في هذا البحث نعرض مسألة كوشي في الفضاءات لانهائية الأبعاد مع إستخدام مفهوم للمفاضلة مرتبط بالتبولوجيا ومفهوم القياس .

وقد درست هذه المسألة من قبل باحثين عدة وهنا سنعرض هذه المسألة في حالة المعادلة التفاضلية الخطية واللاخطية وبعض خواص التكامل الجديد الذي يعتبر تعميم لتكامل بوخنر للدوال متجهية القيم أنظر [1]-[5] .

تعريفات ومفاهيم أولية :

1 . ليكن X فضاءً منظماً لانهائي الأبعاد و Y فضاء محدب موضعياً لانهائي الأبعاد و Ω مجموعة مفتوحة في X .

نقول عن الدالة : $f:\Omega \to Y$ أنها $b-$ قابلة للمفاضلة (فضولة) تماماً في النقطة $x_o \in \Omega$ إذا كان :

$f(x+h)-f(x)=f'(x_o)h+w(x,h)$ حيث $f'(x)\in L(X,Y)$

أما $L(X,Y)$ فضاء الدوال الخطية المستمرة من X إلى Y . و w تحقق الشرط :

لأي نصف نظيم مستمر p في Y يوجد $\delta>0$ بحيث من أجل :

$\|x-x_o\|<\delta$, $h\in X$, $\|h\|<\delta$ تتحقق المتباينة $p(w(x,h))\le\|h\|$.

كحالة خاصة من أجل $x=x_o$ فإن f تسمى b – فضولة في النقطة x_o .

2 . الفضاء الدالي : $L_b(B_\theta,X_\theta)$

لتكن B – كرة واحدية مغلقة في فضاء باناخ X .

θ – تبولوجيا محدبة موضعياً في X بحيث تحقق الشروط :

I – عدد المجموعات المحدودة في X و X_θ متساوي .

II – B مجموعة مغلقة بالنسبة إلى θ .

III – X_θ فضاء تام بالتتالي .

(X_θ هو فضاء ناتج عن فضاء باناخ X معرفة عليه تبولوجيا محدبة موضعياً).

نرمز بـ $L(B_\theta,X_\theta)$ لمجموعة الدوال الخطية من X إلى X بحيث يكون مقصورها على B_θ مستمر في الصفر كدالة من B_θ إلى X_θ. وهو فضاء خطي .

سنرمز بـ $L_b(B_\theta,X_\theta)$ للفضاء $L(B_\theta,X_\theta)$ المعرف عليه تبولوجيا التقارب المنتظم على المجموعات المحدودة من X . أي أن $A\in L_b(B_\theta,X_\theta)$ إذا لكل جوار الصفر V في X_θ يوجد جوار الصفر U في X_θ بحيث : $A(U\cap B)\subset V$.

أما التبولوجيا في $L_b(B_\theta,X_\theta)$ فتعرف كما يلي : قاعدة جوارات الصفر في $L(B_\theta,X_\theta)$ هي عائلة المجموعات :

$W_v=\{A\in L_b(B_\theta,X_\theta): AB\subset V\}$ ، حيث V أي عنصر من جوارات الصفر في X_θ .

3 . الفضاء الدالي : $\tilde{C}_b^1(\Omega, X_\theta)$

لتكن Ω مجموعة مفتوحة في فضاء باناخ X نرمز بـــ $\tilde{C}_b^1(\Omega, X_\theta)$ لمجموعة الـــدوال $b-$ فضـــولة علـــى Ω، $f : \Omega \to X_\theta$ بحيـــث $\sup\limits_{x\in\Omega}\|f(x)\| < \infty$ و $f'(\Omega) \subset L(B_\theta, X_\theta), \sup\limits_{x\in\Omega}\|f'(x)\| < \infty$. أمـــا $f' : \Omega \to L(B_\theta, X_\theta)$ دالة مستمرة .

ونعـــرف النظيم $\|\cdot\|_1$ في $\tilde{C}_b^1(\Omega, X_\theta)$ كما يلي : $\|f\|_1 = \sup\limits_{x\in\Omega}(\|f(x)\| + \|f'(x)\|)$

فيصبح فضاءً منظماً . وهذا الفضاء تام، أنظر[1] .

4 . الفضاء الدالي : $\hat{E} = L_1(I, \tilde{C}_b^1(\Omega, X_\theta), \|\cdot\|_1)$

بمـــا أن $(\tilde{C}_b^1(\Omega, X_\theta), \|\cdot\|_1)$ فضـــاء باناخ لذلك نعرف فضاء باناخ لصفوف التكافؤ للدوال الكمولة (القابلة للمكاملة) حسب بوخنر .

$$\hat{f} : I \to \tilde{C}_b^1(\Omega, X_\theta)$$

حيث I فترة مغلقة من R ونرمز له بـــ $\hat{E}$:

$$\hat{E} = L_1(I, \tilde{C}_b^1(\Omega, X_\theta), \|\cdot\|_1)$$

ويمكن اعتبار كل عنصر من $\hat{E}$ كصف تكافؤ للدوال :

$$f : (t, x) \to f(t, x), f : I \times \Omega \to X_\theta$$

القيوســـة فـــي t كدالـــة من I إلى X لكل $x \in \Omega$ والتي تنتمي إلى $\tilde{C}_b^1(\Omega, X_\theta)$ تقريباً لكل $t \in I$ مع النظيم في $\hat{E}$:

$$\|f\|_{\hat{E}} = \int \|\hat{f}(t)\|_1 dt$$

5 . المعادلات التفاضلية والتكاملية الخطية :

تمــت في [1] دراسة خواص بعض المعادلات التفاضلية والتكاملية الخطية المتعلقة بمسألة كوشي:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x & , \quad (1) \\ x(t_1) = x_1 & , \quad (2) \end{cases}$$

حيث : $t_1 \in I \wedge x_1 \in X \wedge A \in L_1\left(I, L_{\|\cdot\|}(B_\theta, X_\theta)\right)$.

نعتــبر حــلاً للمســألة (1)-(2) كل دالة مستمرة مطلقاً $x : I \to X$ بحيث تقريباً لكل $t \in I$ تتقارب العبارة التالية :

$$(\Delta t)^{-1}\left[x(t + \Delta t) - x(t)\right]$$

إلى $A(t)x(t)$ في النظيم في X من أجل $\Delta t \to 0$ ويتحقق الشرط (2) .

نــورد بعض التمهيدات اللازمة لبرهان وجود ووحدانية حل مسألة كوشي (1)-(2) انظر [1] .

تمهيدية 1 : إذا كان $A \in L_1\left(I, L_{\|\cdot\|}(B_\theta, X_\theta)\right) \wedge x : I \to X$ دالة مستمرة فإن:

$$A(\tau)x(\tau) \in L(I, X)$$

تمهــيدية 2 : لتكــن الدالــــة $x : I \to X$ مســتمــرة مطلقـــاً و $\dfrac{dx}{dt} = 0$ تقريبـــاً فـــي كل مكان و $x(t_1) = 0$ عندها $x \equiv 0$.

تمهيدية 3 : (مشابهة لتمهيدية غرونوول)

لتكــن الدالة $y(t)$ مستمرة وغير سالبة على I و $a = const$ والدالة $\Psi(\tau)$ كمولة حسب ليبيغ ولتكن المتباينة التالية محققة :

$$y(t) \le a + \left|\int_I \Psi(\tau)y(\tau)d\tau\right| \quad , \quad t \in I$$

عندها تتحقق المتباينة الآتية :

$$y(t) \le a.\exp\left(\left|\int_I \Psi(\tau)d\tau\right|\right)$$

من أجل $t \in I$.

6. وجود ووحدانية حل المسألة (1)-(2) :

نأخذ المعادلة التكاملية :

$$x(t) = x_1 + \int_I A(\tau)x(\tau)d\tau \quad , \quad (3)$$

ليكـن $x(t)$ – حلاً للمسألة (1)-(2) عندها حسب التمهيدية 1 فإن $A(\tau)x(\tau)$ دالة كمولة . وبمكاملة المعادلة (1) من t_1 إلى t وباستخدام (2) نجد أن $\dot{x}(t)$ حل للمعادلة (3) (حسـب التمهيدية 2) . وبالعكس إذا كانت الدالة $x(t)$ حلاً مستمراً للمعادلة (3) فإن $x(t)$ دالة مستمرة مطلقاً (لأن الطرف الأيمن من (3) مستمر مطلقاً) و $x(t_1) = x_1$ كمـا أن الطرف الأيمن (والطرف الأيسر) للمعادلة (3) يمثل دالة قابلة للمفاضلة من I إلى X بالنسبة إلى t تقريباً في كل مكان ومشتقها يتطابق مع $A(t)x(t)$ تقريباً في كل مكان، أي أن $x(t)$ حلاً للمسألة (1)-(2) .

نبرهن أولاً أنه لكل $t_o \in I$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لكل $t_1 \in [t_o - \delta, t_o + \delta] \cap I = I_1$ يوجد حل وحيد للمعادلة (3) على I_1 أنظر [6] .

ليكن $\delta > 0$ بحيث يكون $\int_M \Psi(\tau)d\tau < 2^{-1}$ لأي مجموعة جزئية قيوسة $M \subset I$ (يوجـد عـدد δ لأن تكـامل ليبـيغ يمـثل دالة مستمرة مطلقاً كدالة مجموعات) ذات قياس $\mu(M) \le 2\delta$.

ليكـن $x_1 \in X, t_1 \in I, t_o \in I$. نرمـز بـــــ $C(I_1, X)$ لفضـاء باناخ للدوال المستمرة من I_1 إلى X مع النظيم :

$$\|\varphi(.)\|_c = \max_{t \in I_1} \|\varphi(t)\|$$

لتكن $\|A(t)\| = \Psi(t)$ ولتكن Q كرة واحدية مغلقة في $C(I_1, X)$. عندها فالمؤثر $\Phi : 2\|x_1\|Q \to 2\|x_1\|Q$ المعرف بالعلاقة : $[\Phi(x(.))](t) = x_1 + \int_I A(\tau)x(\tau)d\tau$ يكون تقليصاً. إذا كان $x(.) \in 2\|x_1\|Q$ فإن :

$$[\Phi(x(.))](t) \in \|x_1\|Q + 2\|x_1\|\left(\int_I \Psi(\tau)d\tau\right) \in \|x_1\|[1 + 2.2^{-1}]Q = 2\|x_1\|Q$$

ومنه $[\Phi(x(.))] \in 2\|x_1\|Q$.

إذا كان $\tilde{x}(.), x(.) \in 2\|x_1\|Q$ و $\|x(.) - \tilde{x}(.)\|_c = \lambda$ فإن :

$$\|[\Phi(x(.)) - \Phi(\tilde{x}(.))]\|_c = \left\|\int_I A(\tau)\,[x(\tau) - \tilde{x}(\tau)d\tau]\right\| \leq$$

$$\leq \lambda \int_I \|A(\tau)\|d\tau = \lambda\left|\int_I \Psi(\tau)d\tau\right| \leq 2^{-1}.\lambda = 2^{-1}\|x(.) - \tilde{x}(.)\|_c$$

وبالتالـــي توجد نقطة وحيدة ثابتة $x(.) \in 2\|x_1\|Q$ للمؤثر Φ أي أنه يوجد حل وحيد في الفضاء $C(I_1, X)$ للمعادلة (3) .

الآن نتحقق من وحدانية الحل (نستخدم التمهيدية 3) من المساواة :

$$x(t) = x_1 + \int_I A(\tau)x(\tau)d\tau$$

نجد أن :

$$\|x(t)\| \leq \|x_1\| + \left\|\int_I A(\tau)x(\tau)d\tau\right\| \leq \|x_1\| + \left|\int_I \|A(\tau)\|.\|x(\tau)\|d\tau\right| \leq \|x_1\|.\exp\left|\int_I \|A(\tau)\|d\tau\right| \quad , \quad \forall t \in I$$

لذلك إذا كان $\tilde{x}(.), x(.)$ حلين للمعادلة (3) فإن :

$$\|x(.) - \tilde{x}(.)\| \leq 0.\exp \int_I \|A(\tau)\|d\tau = 0$$

أي أن : $x(t) = \tilde{x}(t)$.

7 . تــم فــي [2] إثـبات مبرهـنة هامة حول فضولية المعادلة التفاضلية العادية اللاخطــية بالنسـبة للشرط الابتدائي (والمعطيات الابتدائية بشكل عام) في الفضاءات التبولوجية المحدبة موضعياً ذات الأبعاد اللانهائية .

و تعطى عندها مسألة كوشي كما يلي :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) & , \quad (4) \\ x(t_1) = x_1 & , \quad (5) \end{cases}$$

حيث $f \in L_1\left(I, \left(\mathcal{C}_b^1(\Omega, X_\theta), \|\cdot\|_1\right)\right)$

عـند البحـث في نظرية المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها، في مسائل القيم القصوى والـتحكم الأمـثل، تظهـر أمامـنا مسائل كوشي من النوع (4)-(5) ذات طرف أيمن عشوائي ومعطيات إبتدائية عشوائية علماً أن المسألة (4)-(5) درست في حالة الطرف الأيمـن $f(t,x)$ قابل للمفاضلة في x حسب مفهوم للتفاضل أضعف من مفهوم فريشيه للتفاضل(مفهوم فريشيه للتفاضل قوي ومرتبط بالنظيم) . أما قابلية التفاضل الواردة في [2] فمرتـبطة بالتبولوجيا التي تحقق شروط معينة ، وكذلك الدالة $f(t,x)$ قيوسة في المتغير t .

وقـد استخدم تكامل بوخنر في حل المسألة (4)-(5) إلا إنه مع دراسة المسائل في المتغـيرات العشـوائية نصـادف دوال غير كمولة حسب بوخنر على أي فترة ولكنها كمولة حسب مفهوم جديد للتكامل (هو تعميم لتكامل بوخنر). وكذلك لا بد من التخلص أحياناً من مفهوم فريشيه للتفاضل .

8 . حول تكامل بوخنر الجديد :

المسائل التي تؤول إلى مفهوم جديد للتكامل .

ندرس مسألة كوشي :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) & , \quad (4) \\ x(t_1) = x_1 & , \quad (5) \end{cases}$$

حيث $t, t_1 \in [\alpha, \beta] \subset R$ و f دالة تحقق شروط معينة في حالات مدروسة .

نفـــرض الآن $x_1 = x_1(w)$ كمـــية عشـــوائية، أي دالـــة قيوســـة فـــي فضـــاء احتمالي (Ω, Σ, p) . في هذه الحالة تأخذ مسألة كوشي الشكل :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t,\omega)}{dt} = f(t, x(t,\omega)) & , \quad (6) \\ x(t_1,\omega) = x_1(\omega) & , \quad (7) \end{cases}$$

وحل هذه المسألة هو العملية العشوائية $x(t,\omega)$.

نعرض المثال الآتي على دالة غير كمولة حسب بوخنر :

ليكن $\Omega =]0,1[$ مع قياس ليبيغ ولتكن الدالة $f(t,x) = \sin(t\,x)$

$$f(t,.): \{x(\omega)\} \to \{\sin(t\ x\ (\omega))\} \quad , \quad (8)$$

كدالة من $L_p(0,1) = L_p$ في L_p و $1 \le p < \infty$ من أجل t مثبتة و $t \neq 0$.

وليس فضولة حسب فريشيه ولا في أي نقطة [7] .

لكـــن مـــن أجل $1 < p < \infty$ فإن $f(t,0)$ فضولة على L_p حسب نظام المجموعات المحـــدودة [8] كدالة من L_p في (L_p, σ) حيث : $\left(P^{-1} + P'^{-1} = 1\right), \sigma = \sigma(L_p, L_{p'})$

و σ تبولوجيا ضعيفة في L_p .

وعـــندما $1 \le p < \infty$ فالدالة $f(t,.)$ من L_p في L_p فضولة حسب نظام المجموعات المتراصة [9] .

في هذه الحالة :

$$[f'_x(t,x)\,h](\omega) = [t\cos(t\ x\ (\omega))]\,h(\omega) \quad , \quad (9)$$

من $1 \le p < \infty$:

$$\|f'_x(t,x)\| = ess\ \ \sup\{|t\cos(t\ x(\omega))|, \omega \in (0,1)\} \quad , \quad (10)$$

ونلاحظ إذا كان $\widetilde{x}(.) \in L_p$:

$$ess\ \ \sup\{|\widetilde{x}(\omega)|, \omega \in (0,1)\} = \infty$$

فإن الدالة:

$$t \to f'_x(t,\tilde{x}) \quad , \quad (11)$$

من R في الفضاء $L(L_p,L_p)$ (وهوفضاء الدوال الخطية المستمرة من L_p في L_p مع النظيم العادي أنظر (9)) ليس كمولة حسب بوخنر ولا على أي فترة لأنها لا تتمتع بخاصية لوزين [6]. ونشير إلى أن مسائل التحكم الأمثل في الفضاءات لانهائية الأبعاد تستخدم مفهوم التفاضل حسب فريشيه وتكامل بوخنر [10] و [11] و [13].

إذا كان X فضاء تبولوجي خطي فإن X' فضاء خطي للداليات الخطية المستمرة على X.

$P(X)$ - نظام كل أنصاف النظائم المستمرة في X.

$b(X)$ - نظام كل المجموعات الجزئية المحدودة في X. $I=[\alpha,\beta]\subset R$

و $M(I)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية القيوسة حسب ليبيغ في I و $E\in M(I)$.

لتكن الدالة $\varphi : E \to X_\theta$ مستمرة بانتظام و $\varphi(E)\in b(X)$ عندها يوجد :

$$\int_E \varphi(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\, m(\,]t_{i-1},t_i[\cap E\,) \quad , \quad (12)$$

حيث : $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \alpha = t_o < t_1 < \ldots < t_n = \beta$

$\xi_i \in]t_{i-1},t_i[\cap E$ والنهاية في (12) موجودة في X_θ وذلك ينتج من: الاستمرار المنتظم للدالة φ والشرط $\varphi(E)\in b(X)$ ومن كون B_θ تامة بالتتالي وكذلك من انفصالية X_θ.

مبرهنة 1 : تعتبر العلاقات الآتية صحيحة :

$$\forall x' \in L(X_\theta, R): x' \int_E \varphi(t)dt = \int_E x'\varphi(t)dt \qquad , (13)$$

$$\forall x' \in L(X_\theta, R): \left|x' \int_E \varphi(t)dt\right| \le \|x'\| \int_E \|\varphi(t)\|dt \qquad , (14)$$

$$\left\|\int_E \varphi(t)dt\right\| \le \int_E \|\varphi(t)\|dt \qquad , (15)$$

$$\forall P \in P(X_\theta): P\left(\int_E \varphi(t)dt\right) \le \int P(\varphi(t))dt \qquad , (16)$$

$$\int_E [c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)]dt = c_1 \int_E \varphi_1(t)dt + c_2 \int_E \varphi_2(t)dt \qquad , (17)$$

للدوال المستمرة بانتظام φ, $\varphi_i : E \to X$ التي تحقق الشروط :
$\varphi(E) \in b(X)$, $\varphi_i(E) \in b(X)$ ولأي $i = 1,2$ $c_i \in R,$.

البرهان :

تنتج الخاصة (13) من (12) أما الخاصة (14) فتنتج من (13) ومن المتباينة :

$$\|x'\varphi(t)\| \le \|x'\|.\|\varphi(t)\|$$

و (15) تنتج من (12) و II من الفقرة 2 أما (16) و (17) فتنتج من (12) باستخدام الانتقال إلى النهاية في المتباينة والمساواة .

ملاحظة :

تنتج من (13) جموعية التكامل كدالة مجموعات لأن ذلك صحيح للدوال العددية .

References

1. Al-hamza M., Sukhinin M. (1984). "The differentiability theorem of ordinary differential equation solution "Moscow, in Zbornik of scientific works" differential equation and functional analysis" P.98-140.
2. Al-hamza M. (1985). "The Pontryagin's maximum principle & transversal conditions in the infinite-dimensional spaces "unpublished dissertation" Moscow.
3. Al-hamza M. (1992) . "The problem of optimal control in infinite-dimensional spaces "The journal of sciences, № 1, Altahaddi University, Misurata-Libya.
4. Lusternik L. Sobalev V. (1982). "Course of functional analysis" Moscow, Vyshaya shkola.
5. Sukhinin M. (1992). "Selected chapters of nonlinear analysis" Moscow.
6. Edwards R. (1996). Functional analysis, Moscow, Mir.
7. Krasnoselski M. (1996). Integral operators in integral function spaces, Moscow.
8. Averbukh V., Smolyanov O. (1986). Uspekhi math. nauk, 23, № 4, Moscow.
9. Sava M. (1996). Czechoslovak. math. journal. 16, № 3.
10. Yosida K. (1995). Functional analysis. Springer, New York.
11. Sukhinin M. (1978). Mat. zbornik, № 3, Moscow.
12. Sukhinin M. (1985). Differential equations, 21, № 6, Moscow.
13. Shilov H. Gurevich B. (1976). "Integral, measure & derivate".

ABSTRACT

"The study of Cauchy problem for Linear & nonlinear differential Equation in infinite-dimensional function spaces"

The differential equations & their Cauchy problem were studied in different spaces witch are relative to different definitions of differentiability.

The Cauchy problem has many applications in the scientific research, particularly in optimal control.

In this work, the Cauchy problem was demonstrated in infinite-dimensional spaces, using the differentiability in relation to some properties of new Bochner integral for the undertaken problems were established.